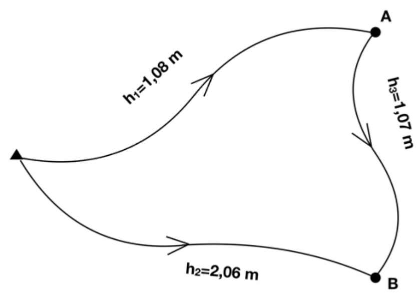
Temat: **ZASADY FORMUŁOWANIA ZADAŃ WYRÓWNAWCZYCH I ICH ROZWIĄZYWANIE Z ZASTOSOWANIEM METODY NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW**

Zagadnienia:

1. Zasady formułowania zadań wyrównawczych
2. Rozwiązywanie z zastosowaniem metody najmniejszych kwadratów

Przeprowadźmy analizę sieci niwelacyjnej. Przyjmijmy, że istnieje punkt R (reper) z znanej wysokości. W oparciu o tę wysokość chcemy wyznaczyć wysokość punktu A i B. W tym celu mierzymy przewyższenia h_1 i h_2 oraz dodatkowo h_3 (pomiary wykonywane niwelatorem).



Spróbujmy wyznaczyć wysokość wysokości H_A i H_B na postawie wysokości repera H_{Rp} = 100,00 m oraz zmierzonych przewyższeń. Na podstawie prostych wyznaczeń otrzymamy różne wyniki. Rozbieżności wynikają z faktu, że wyniki pomiarów hi są obarczone błędami. Prawdziwe wartości przewyższeń nie są znane. Wobec tego mamy układ równań obserwacyjnych o postaci:

$$(*)\quad \begin{cases} \bar{h}_1 = F_1\left(H_A, H_B\right) = H_A - H_{Rp} \\ \bar{h}_2 = F_2\left(H_A, H_B\right) = H_B - H_{Rp} \\ \bar{h}_3 = F_3\left(H_A, H_B\right) = -H_A + H_B \end{cases} \quad \text{bo} \quad \begin{cases} H_A = H_{Rp} + \bar{h}_1 \\ H_B = H_{Rp} + \bar{h}_2 \\ H_B = H_A + \bar{h}_3 \end{cases}$$

Jak już wiadomo wartości prawdziwe należy zastąpić ich estymatorami:

$$\bar{h}_i = \hat{h}_i$$

wówczas, gdy:

$$(**)\quad \begin{cases} \hat{h}_1 = h_1^{obs} + v_1 \\ \hat{h}_2 = h_2^{obs} + v_2 \\ \hat{h}_3 = h_3^{obs} + v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \hat{h}_1 - h_1^{obs} \\ v_2 = \hat{h}_2 - h_2^{obs} \\ v_3 = \hat{h}_3 - h_3^{obs} \end{cases}$$

Układ równań obserwacyjnych musi być spełniony nie tylko przez wartości prawdziwe, ale również przez ich estymatory. Czyli układ równań (**) podstawiamy do (*) i otrzymujemy:

$$\begin{cases} v_1 = \hat{H}_A \qquad\quad - H_{Rp} - h_1^{obs} \\ v_2 = \qquad\quad \hat{H}_B - H_{Rp} - h_2^{obs} \\ v_3 = -\hat{H}_A + H_B \quad - h_3^{obs} \end{cases}$$

wobec tego model funkcjonalny w zapisie macierzowym ma postać:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{H}_A \\ \hat{H}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_{Rp} - h_1^{obs} \\ -H_{Rp} - h_2^{obs} \\ -h_3^{obs} \end{bmatrix}$$

V=AX+L

Macierz w zadaniu przyjmuje postać:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -101{,}08 \\ -102{,}06 \\ -1{,}07 \end{bmatrix}_{[m]}$$

Załóżmy, że obserwacje wykonano z takim samym błędem średnim i są to pomiary niezależne: $m_1 = m_2 = m_3 = 1$

wobec tego:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \underline{0} \\ & 1 & \\ \underline{0} & & 1 \end{bmatrix}$$

Należy wyznaczyć X z zależności:

$$\hat{\mathbf{X}} = -\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{L}$$

ponieważ: $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & & \underline{0} \\ & 1 & \\ \underline{0} & & 1 \end{bmatrix}$ wówczas:

$$\hat{\mathbf{X}} = -\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}$$

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -101,08 \\ -102,06 \\ -1,07 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100,01 \\ -103.13 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{X}} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -100,01 \\ -103.13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 101,05 \\ 102.09 \end{bmatrix}$$

Następnie wyznaczamy poprawki:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 101,05 \\ 102.09 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -101,08 \\ -102,06 \\ -1,07 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.03 \\ 0.03 \\ -0.03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Wyznaczamy estymatory wartości prawdziwych:

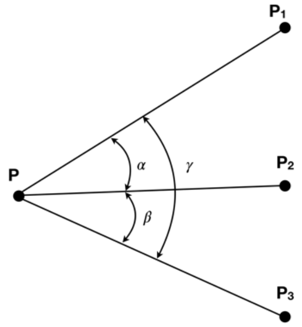
$$\hat{h}_1 = h_1^{obs} + v_1 = 1,08 + (-0,03) = 1,05m$$
$$\hat{h}_2 = h_2^{obs} + v_2 = 2,06 + 0,03 = 2,09m$$
$$\hat{h}_3 = h_3^{obs} + v_3 = 1,07 + (-0,03) = 1,04m$$

i sprawdzamy z układem równań obserwacji:

$$\hat{h}_1 = \hat{H}_A - H_{Rp} = 101,05 - 100 = 1,05m$$
$$\hat{h}_2 = \hat{H}_B - H_{Rp} = 102,09 - 100 = 2,09m$$
$$\hat{h}_3 = -H_A + H_B = -102,09 + 101,05 = 1,04m$$

Ćwiczenia:
Poniższe zadania do samodzielnego rozwiązania. Wyniki będą sprawdzone na zajęciach (gdy będą ponownie uruchomione.

Zadanie nr 1
Niech z pozycji P zmierzone będą kąty, α, β, γ do pewnych punktów P_1, P_2, P_3.



Wyniki pomiarów	Błędy średnie	Wartości oczekiwane
$\alpha^{obs} = 30°02'$	$m_\alpha = 2'$	$\alpha^o = 30°$
$\beta^{obs} = 40°07'$	$m_\beta = 2'$	$\beta^o = 40°$
$\gamma^{obs} = 70°00'$	$m_\gamma = 1'$	

Zadanie nr 2

Pomierzono pewne wielkości y_1, y_2, y_3, y_4 uzyskując wyniki: $y_1^{obs} = 6, y_2^{obs} = 1, y_3^{obs} = 3, y_4^{obs} = 2$
Pomiędzy tymi wielkościami a pewnymi parametrami x_1, x_2, x_3 istnieją następujące związki:

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + 5 \\ y_2 = -x_1 + x_2 - x_3 + 4 \\ y_3 = -x_2 + x_3 \\ y_4 = x_1 + 2x_2 - x_3 + 1 \end{cases}$$

wyrównać układ obserwacyjny MNK przyjmując, że wyniki pomiaru charakteryzują się błędami średnimi o wartościach: $m_1=1$, $m_2=0,5$, $m_3=1$, $m_4=0,5$