Temat: Skrót procedury wyrównania i oceny dokładności

Poniżej przedstawiona została cała procedura wyrównania wyników obserwacji, która jest realizowana w celu wyznaczenia poszukiwanych parametrów. Poniższa procedura jest podsumowaniem przedstawionych w poprzednich wykładach elementów wyrównania metodami: klasyczną i parametryczną.

1. Ustalenie liczby obserwacji koniecznych

Wybór parametrów $X_1, X_2, \ldots, X_r$ oraz utworzenie układu równań obserwacyjnych:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= F_1\left(X_1, X_2, \ldots, X_r\right) = F_1\left(\mathbf{X}\right) \\
x_2 &= F_2\left(X_1, X_2, \ldots, X_r\right) = F_2\left(\mathbf{X}\right) \\
&\vdots \\
x_n &= F_1\left(X_1, X_2, \ldots, X_r\right) = F_n\left(\mathbf{X}\right)
\end{aligned}
$$

2. Obliczenie na podstawie wyników obserwacji przybliżonych wartości $\mathbf{X}^0$, a następnie przybliżonych wartości wielkości mierzonych $\mathbf{x}^0 F\left(\mathbf{X}^0\right)$

3. Linearyzacja układu równań obserwacyjnych.

Utworzenie macierzy współczynników

$$
\mathbf{A} = \left.\frac{\partial F\left(\mathbf{X}\right)}{\partial \mathbf{X}}\right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^0} \in \Re^{n,r}
$$

oraz wektora wyrazów wolnych

$$
\mathbf{L} = F\left(\mathbf{X}^0\right) - \mathbf{x}^{obs} = \mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^{obs} \in \Re^{n,1}
$$

stanowiących elementy układów równań poprawek.

4. Na podstawie błędów średnich lub innych przesłanek ustalenie macierzy wag:

$$
\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{bmatrix}
$$

gdzie: $p_i = \frac{c}{m_i^2}\left(c > 0,\right)$ jest wagą pojedynczej obserwacji (zwykle przyjmuje się c=1)

5. Utworzenie macierzy:

$\mathbf{A}^T\mathbf{PA} \in \Re^{r,r}$ oraz $\mathbf{A}^T\mathbf{PL} \in \Re^{r,1}$
i rozwiązanie jedną z dwóch znanych metod:

- metodą nieoznaczoną: $\hat{\mathbf{d}}\mathbf{x} = -\left(\mathbf{A}^T\mathbf{PA}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{PL}$
- metodą oznaczoną: $\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{A}^T\mathbf{PA} & \vdots & \mathbf{A}^T\mathbf{PL} \end{array}\right] = \mathbf{R}^T\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \vdots & \mathbf{L}_\mathbf{R} \end{array}\right] \rightarrow \mathbf{R}\hat{\mathbf{d}}\mathbf{x} + \mathbf{L}_\mathbf{R} = 0$

6. Na podstawie wyznaczonego wektora $\hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}$ wyznaczamy:

- wektora poprawek: $\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{d}}\mathbf{x} + \mathbf{L}$
- sumy równoważnych kwadratów poprawek: $s = \hat{\mathbf{V}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{V}}$
- wartości kontrolnej: $s' = \mathbf{L}^T\mathbf{PAdx} + \mathbf{L}^T\mathbf{PL}$

7. I etap kontroli wyników obliczeń

Spełnienie warunku $s = s'$ mówi o tym, ze prawidłowo rozwiązano zadanie optymalizacyjne
$\min_{dx} = \mathbf{V}^T\mathbf{PV} = \hat{\mathbf{V}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{V}}$
Dla ustalonych macierzy **A**, **L**, **P**

8. Obliczenie estymatora współczynnika wariancji:

$$m_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{V}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{V}}}{n-r} = \frac{s}{f}$$

$m_0 < 1$ - zawyżono wartości błędów średnich pomiaru a'priori
$m_0 > 1$ - zaniżono wyniki błędów średnich
$m_0 = 1$ - (na ogół $0,8 < m_0 < 1,2$) dobrano prawidłowe wagi

9. Obliczenie wyrównanych wartości parametrów

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^0 + \hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}$$

oraz wyrównanych wyników obserwacji
$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{obs} + \hat{\mathbf{V}}$

10. II etap kontroli
Polega na sprawdzeniu czy układ równań obserwacyjnych jest spełniony dla wyrównanych parametrów:
$\hat{\mathbf{x}} = F\left(\mathbf{X}\right)$
Negatywny wynik to:
- błędy w równaniach obserwacyjnych np. zła numeracja punktów;
- błędy w linearyzacji układu równań obserwacji.

11. Ocena dokładności
Standardowa ocena to:

- obliczenie błędów średnich wyrównanych parametrów na podstawie macierzy kowariancji:

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{X}}} = m_0^2 \left(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}\right)^{-1} \rightarrow m_{\hat{\mathbf{X}}_i} = \sqrt{\left[\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{X}}}\right]_{ii}}$$

- obliczanie błędów średnich wyrównanych wyników pomiaru na podstawie zależności:

$$m_{\hat{\mathbf{X}}_i} = m_0 \sqrt{a_{i\bullet} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}\right)^{-1} a_{i\bullet}^T}$$

$a_{i\bullet}$ - i-ty wiersz macierzy A

- wyznaczenie błędów położenia punktów w sieciach osadzonych w układach (X,Y):

$$m_P = \sqrt{m_{\hat{\mathbf{X}}_i}^2 + m_{\hat{\mathbf{Y}}_i}^2}$$

W bardziej zaawansowanych analizach są ustalane elementy elipsy ufności (błędów), które nie były przedmiotem wykładów. Szczegóły dostępne w publikacjach podawanych na zajęciach.