

## Temat: METODA PARAMETRYCZNA

Zagadnienia:

1. Układ równań obserwacyjnych
2. Liniowy układ równań poprawek

Założmy, że mamy układ równań obserwacji:

$$\begin{cases} L_1 = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ L_2 = F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ L_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1)$$

gdzie:  $L_1, L_2, \dots, L_i$  są wielkościami mierzonymi (namiar, odległość, i.t.d.)  
każda wielkość jest sumą

$$L_i = l_i^{obs} + v_i \quad (2)$$

( $l_i^{obs}$  - zmierzona wielkość obserwowana,  $v_i$  - poprawka do wielkości zmierzonej.)

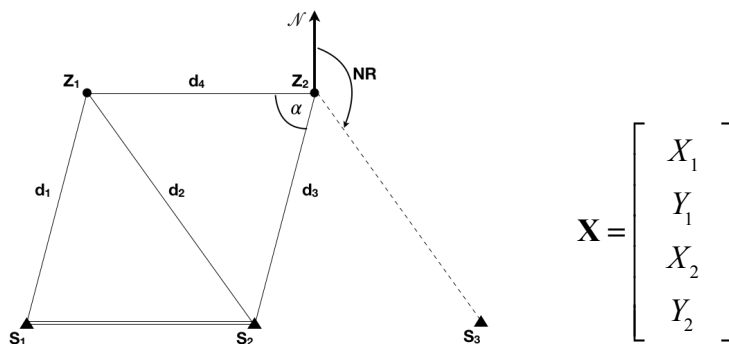
Po podstawieniu (2) do (1) otrzymujemy:

$$\begin{cases} l_1^{obs} + v_1 = F_1(x_1^o + dx_1, x_2^o + dx_2, \dots, x_n^o + dx_n) \\ l_2^{obs} + v_2 = F_2(x_1^o + dx_1, x_2^o + dx_2, \dots, x_n^o + dx_n) \\ \dots \\ l_i^{obs} + v_i = F_i(x_1^o + dx_1, x_2^o + dx_2, \dots, x_n^o + dx_n) \end{cases} \quad (3)$$

Układ równań (1) wyrażający związki między wartościami prawdziwymi, a przyjętymi parametrami nazywamy w rachunku wyrównawczym układem równań obserwacyjnych.

Podobnie jak w przypadku zadania z niwelacji wektor wartości prawdziwych zastępujemy układem równań liniowych, który jest szczególnym przypadkiem układu równań obserwacyjnych o ogólnej postaci (1).

Założmy, że wyrównaniu podlega nawigacyjna sieć pomiarowa przedstawiona na rysunku



$S_i$  – punkty o znany współrzędnych. Przyjmując za parametry współrzędne  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$  nowo wyznaczanych punktów  $Z_1$  i  $Z_2$  wielkości mierzone można przedstawić w postaci funkcji:

- odległości np.  $d_1$ :

$$d_1 = \sqrt{(X_{S_1} - X_1)^2 + (Y_{S_1} - Y_1)^2}$$

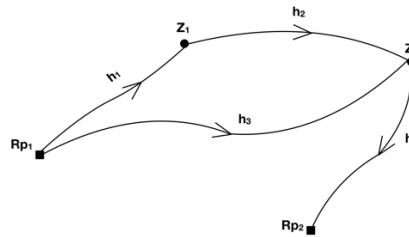
- kąty np.:

$$\alpha = \operatorname{artg} \frac{Y_1 - Y_2}{X_1 - X_2} - \operatorname{artg} \frac{Y_{S_2} - Y_2}{X_{S_2} - X_2} = F_\alpha(\mathbf{X})$$

- namiary np.:

$$NR = \operatorname{artg} \frac{Y_{S_3} - Y_2}{X_{S_3} - X_2} = F_{NR}(\mathbf{X})$$

lub założymy, że w strukturach wysokościowych (sieci niwelacyjne w układach współrzędnych wysokościowych - H) o mierzonych przewyższeniach  $h_i$  za parametry możemy przyjąć wysokości punktów  $Z_1, Z_2$  jak na rysunku.



wówczas mierzone wielkości można przedstawić w funkcji:

$$h_1 = H_1 - H_{Rp_1}, \quad h_2 = H_2 - H_1, \quad h_3 = H_2 - H_{Rp_1}, \quad h_4 = H_2 - H_{Rp_2}$$

Układy są prawdziwe (spełnione) nie tylko przez ich wartości prawdziwe  $\mathbf{X}$ , ale także ich estymatory.  
 $\bar{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}$

dlatego też przyrównujemy równie (2) do (1), a następnie rozwijamy prawą stronę w szereg Taylora zgodnie z zależnością:

$$F(X) = F(X^o) + \partial_x F(X^o) \cdot dx = A \cdot dx + w$$

otrzymujemy:

$$F(x_1^o + dx_1, x_2^o + dx_2, \dots, x_n^o + dx_n) = F(x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o) + \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) \cdot dx_1 + \\ + F(x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o) + \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) \cdot dx_2 + \dots + F(x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o) + \left( \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) \cdot dx_n + R$$

Jeżeli takie rozwinięcie podstawimy do równania (3) i wielkości obserwowane przeniesiemy na prawą stronę to otrzymamy liniowy układ poprawek:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \cdot dx_n + F_1(x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o) - l_1^{obs} \\ v_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \cdot dx_n + F_2(x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o) - l_2^{obs} \\ \dots \\ v_i = \frac{\partial F_i}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial F_i}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \cdot dx_n + F_i(x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o) - l_i^{obs} \end{array} \right.$$

zamieniając powyższy liniowy układ równań poprawek na postać macierzową otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_i}{\partial x_1} & \frac{\partial F_i}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o) - l_1^{obs} \\ F_2(x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o) - l_2^{obs} \\ \dots \\ F_i(x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o) - l_i^{obs} \end{bmatrix}$$

czyli  $\mathbf{V} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{d}}\mathbf{x} + \mathbf{L}$

elementy macierzy  $\mathbf{L}$  można przedstawić w postaci:

$$l_i = F_i(x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o) - l_i^{obs}$$

ostatecznie wartości wyrównane otrzymamy z zależności:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^o + \hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}$$

Warunek w metodzie najmniejszych kwadratów mówi nam, że musi być spełniona równość taka, że:

$$v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_i^2 = \min \text{ jest to tożsame z zapisem: } \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \min$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \end{bmatrix} = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_i^2$$

bo

Jednakże każdy pomiar, każda obserwacja obarczona jest błędem opisanym pewną wielkością odchylenia standardowego, czyli:

$$\begin{aligned} l_1^{obs} &\rightarrow \sigma_1 \\ l_2^{obs} &\rightarrow \sigma_2 \\ &\dots \\ l_i^{obs} &\rightarrow \sigma_i \end{aligned}$$

wówczas warunek w MNK przyjmuje postać:

$$\frac{v_1^2}{\sigma_1} + \frac{v_2^2}{\sigma_2} + \dots + \frac{v_i^2}{\sigma_i} = \min$$

wynika z tego, że funkcja celu jest opisana zależnością

$$\mathbf{V}^T \mathbf{C}_{L^{obs}}^{-1} \mathbf{V} = \min$$

gdzie:  $\mathbf{C}_{L^{obs}}$  - jest macierzą kowariancji pomiarów opisanych dla wykonanych obserwacji:

$$\mathbf{C}_{L^{obs}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \text{cov}(l_1^{obs}, l_2^{obs}) & \cdots & \text{cov}(l_1^{obs}, l_i^{obs}) \\ \text{cov}(l_2^{obs}, l_1^{obs}) & \sigma_2^2 & \cdots & \text{cov}(l_2^{obs}, l_i^{obs}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{cov}(l_i^{obs}, l_1^{obs}) & \text{cov}(l_i^{obs}, l_2^{obs}) & \cdots & \sigma_i^2 \end{bmatrix}$$

jeżeli zmienne są niezależne dla każdego pomiaru to  $\text{cov}(l_i^{obs}, l_j^{obs}) = 0$  wówczas:

$$\mathbf{C}_{L^{obs}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \underline{0} \\ \cdots & \sigma_2^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{0} & \cdots & \cdots & \sigma_i^2 \end{bmatrix}$$

Wiedząc, że macierz kowariancji jest pojęciem czysto teoretycznym wprowadza się pojęcie macierzy kofaktorów jako przybliżenie  $\mathbf{C}_{L^{obs}}$  i ma postać:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} m_1^2 & & & \underline{0} \\ & m_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ \underline{0} & & & m_i^2 \end{bmatrix}$$

zakłada się, że:  $\mathbf{C} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}$

Macierzy kofaktorów powiązana jest z macierzą wag co wynika z zależności:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1^2} & & & \underline{0} \\ & \frac{1}{m_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ \underline{0} & & & \frac{1}{m_i^2} \end{bmatrix}$$

Wracając do warunku w metodzie najmniejszych kwadratów założymy, że  $m_0=1$  oraz pamiętając, że  $\mathbf{C} = m_0^2 \mathbf{Q} = m_0^2 \mathbf{P}^{-1}$  otrzymamy:

$$\mathbf{V}^T \mathbf{C}_{L^{obs}}^{-1} \mathbf{V} = \mathbf{V}^T (m_0^2 \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{V} = \frac{1}{m_0^2} \mathbf{V}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}$$

Ostatecznie warunek do rozwiązania w metodzie najmniejszych kwadratów ma postać:

$$\begin{cases} \mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{L} \\ \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \min \end{cases}$$

z rozwiązaniem nieoznaczonym

$$\mathbf{X} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}$$

lub oznaczonym o którym będziemy mówić na zajęciach

Finalnie zawsze należy sformułować zadanie optymalizacyjne:

$$\begin{cases} \mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{L} \\ \mathbf{C}_{X^{obs}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{X^{obs}} = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \min \end{cases}$$

zwane w rachunku wyrównawczym zadaniem wyrównawczym.