

Temat: METODA ODPORNEJ M-ESTYMACJI

Znana w geodezji i dobrze opisana teoretycznie metoda M-estymacji [Wiśniewski 2016] również w zadaniach nawigacyjnych ma podobne zastosowanie [Wiśniewski 2004, Czapplewski 2004]. Podstawowymi obserwacjami w systemach VTS wykorzystujących brzegowe stacje radarowe są namiary lub odległości. Dla zilustrowania możliwości adaptacji metody dla pomiarów mobilnych przedstawione zostanie wykorzystanie tej metody w celu określenia pozycji statku (X_p, Y_p) na morzu z wykorzystaniem np. namiarów radarowych. Namiary NR_i określane są do charakterystycznych ech radarowych. W ten sposób uzyskujemy n -obserwacji, (przy czym $n > 2$). Współrzędne $(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n$, obiektów, które dają nam charakterystyczne echa są znane. Taki układ geometryczny umożliwia utworzenie liniowych, a następnie macierzowych równań poprawek, analogicznie jak w [Czapplewski 2003, Wiśniewski 2014]:

$$NR_i + v_i = F_i(\hat{X}_p, \hat{Y}_p) = \arctg \left. \frac{X_i - \hat{X}_p}{Y_i - \hat{Y}_p} \right\}_{i=1, \dots, n} \Leftrightarrow \mathbf{D} + \mathbf{V}_p = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{X}}_p) \quad (19)$$

gdzie:

$\mathbf{V}_p = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$ -wektor poprawek do zmierzonych namiarów,

$\hat{\mathbf{X}}_p = [\hat{X}_p, \hat{Y}_p]^T$ -wyrównane współrzędne okrętu na morzu.

Zakładamy, że jest znany wektor przybliżonych współrzędnych statku

$\mathbf{X}_p^o = [X_p^o \ Y_p^o]^T$. W prezentowanym zadaniu za przybliżone współrzędne przyjmowane będą współrzędne wyznaczone na podstawie informacji o przebytej drodze i prędkości statku. Wówczas sprowadzając funkcję $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{X}}_p)$ do postaci liniowej przez rozwinięcie w ograniczony do pierwszych wyrazów szereg Taylora [Wiśniewski 2014], uzyskuje się:

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{X}}_p) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_p^o) + \mathbf{A}_p \hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}_p \quad (20)$$

gdzie:

$\mathbf{A}_p = \partial_X \mathbf{F}(\mathbf{X}_p^o)$ przy czym $\hat{\mathbf{X}}_p = \mathbf{X}_p^o + \hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}_p$

Uwzględniając powyższe założenie, układ równań poprawek można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{D} + \mathbf{V}_p = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{X}}_p) \Leftrightarrow \mathbf{D} + \mathbf{V}_p = \mathbf{F}(\mathbf{X}_p^o) + \mathbf{A}_p \hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}_p \Leftrightarrow \mathbf{V}_p = \mathbf{A} \hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}_p + \mathbf{L}_p \quad (21)$$

gdzie:

$$\mathbf{L}_p = \mathbf{F}(\mathbf{X}_p^o) - \mathbf{D}$$

Założmy, że są znane błędy średnie m_1, m_2, \dots, m_n wzajemnie niezależnych wyników pomiaru namiarów NR_1, NR_2, \dots, NR_n . Diagonalna macierz kofaktorów wyników pomiaru

$\mathbf{Q}_D = \text{Diag}(m_1^2, m_2^2, \dots, m_n^2)$ będzie wtedy takim przybliżeniem macierzy kowariancji $\mathbf{C}_D = \text{Diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2)$, że [Wiśniewski 2004]:

$$\mathbf{C}_D = m_0^2 \mathbf{Q}_D = m_0^2 \mathbf{P}^{-1} \quad (22)$$

gdzie:

m_0^2 - jest nieznanym współczynnikiem wariancji,

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_D^{-1} = \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{bmatrix} - \text{znana macierz wag } (p_n - \text{waga } n - \text{tej obserwacji}) \quad (23)$$

Niech ponadto $\Phi(\hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}_p) = \mathbf{V}_p^T \mathbf{C}_D \mathbf{V}_p = \min \Leftrightarrow \Phi(\hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}_p) = \mathbf{V}_p^T \mathbf{P} \mathbf{V}_p = \min$ będzie kryterium estymacji metodą najmniejszych kwadratów. Proces wyznaczania nieznanego wektora pozycji własnej można wówczas utożsamiać z rozwiązaniem klasycznego zadania optymalizacyjnego w metodzie najmniejszych kwadratów [Wiśniewski 2014, Czaplewski 2003 Czaplewski Wiśniewski 2017]:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_p = \mathbf{A}_p \hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}_p + \mathbf{L}_p \\ \mathbf{C}_D = m_0^2 \mathbf{Q}_D = m_0^2 \mathbf{P}^{-1} \\ \varphi(\hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}_p) = \mathbf{V}_p^T \mathbf{P} \mathbf{V}_p = \min \end{cases} \quad (24)$$

Jego rozwiązaniem jest (o ile $|\mathbf{A}_p \mathbf{P} \mathbf{A}_p| \neq 0$)

$$\hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}_p = -(\mathbf{A}_p^T \mathbf{P} \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{A}_p^T \mathbf{P} \mathbf{L}_p \quad (25)$$

Ponadto, ponieważ

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{A}_p \hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}_p + \mathbf{L}_p = -\mathbf{A}_p (\mathbf{A}_p^T \mathbf{P} \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{A}_p^T \mathbf{P} \mathbf{L}_p + \mathbf{L}_p$$

Więc

$$\mathbf{V}_p^T = \mathbf{Q}_V \mathbf{P} \mathbf{L}_p^T \quad (26)$$

gdzie: $\mathbf{Q}_V = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}_p (\mathbf{A}_p^T \mathbf{P} \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{A}_p^T$ jest macierzą kofaktorów poprawek \mathbf{V}_p . Macierz kofaktorów \mathbf{Q}_V jest tutaj rozumiana jako takie przybliżenie macierzy kowariancji \mathbf{C}_V wektora \mathbf{V}_p , że

$$\mathbf{C}_V = m_0^2 \mathbf{Q}_V \quad (27)$$

Współczynnik wariancji jest określany wyrażeniem:

$$m_0^2 = \frac{\mathbf{V}_P^T \mathbf{P} \mathbf{V}_P}{n-2} \quad (28)$$

Jednakże w prowadzonych rozważaniach przyjmuje się, że $m_0^2 = 1$ wówczas $\mathbf{C}_V = \mathbf{Q}_V$.

Założmy teraz, że któryś z namiarów, na przykład wskutek błędnej identyfikacji echa radarowego, jest obarczony błędem grubym. Takiej obserwacji będziemy przyporządkowywać tak zwaną ekwiwalentną wagę \hat{p}_i , która będzie wynikiem tłumienia oryginalnej (wynikającej z zakładanego błędu średniego pomiaru) wagi p . Proces tłumienia będzie przebiegał wg zależności:

$$\hat{p}_n = t(\bar{v}_n) p_n \quad (29)$$

gdzie $t(v_n)$ jest funkcją tłumienia o następujących, podstawowych własnościach:

$$\begin{aligned} t(v_i) &= t(v_j) & \text{dla} & & v_i \in \Delta v_i, v_j \in \Delta v_j \\ t(v_i) &> t(v_j) & \text{dla} & & (v_i \notin \Delta v_i) \vee (v_j \notin \Delta v_j), |v_i| < |v_j| \end{aligned}$$

Przedziały $\Delta v_i = \langle -k\sigma_{v_i}; k\sigma_{v_i} \rangle$ są przedziałami dopuszczalnymi dla poprawek v_i , $i = 1, \dots, n$, ustalonymi przy zakładanym poziomie ufności γ . Przyjmując, że v_i są zmiennymi losowymi o rozkładach normalnym, można zapisać, że:

$$\gamma = P(-k\sigma_{v_i} < v_i < k\sigma_{v_i}) = P(-k < \bar{v}_i < k) = \int_{-k}^{+k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\bar{v}_i^2}{2}\right] d\bar{v}_i$$

gdzie:

$\sigma_{v_i} = \sqrt{[\mathbf{C}_V]_{ii}}$ - odchylenie standardowe i -tej poprawki,

$\bar{v}_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}}$ - poprawki standaryzowane o wspólnym przedziale dopuszczalnym $\Delta \bar{v}_i = \langle -k; k \rangle$

Na przykład dla $\gamma = 0.95$ współczynnik $k = 2$.

Dla potrzeb niniejszego wykładu przyjęto do analiz duńska funkcję tłumienia o postaci:

$$t(\bar{v}) = \begin{cases} 1 \\ \exp\{-\lambda(|\bar{v}| - k)^g\} \end{cases} \quad \text{dla} \quad \begin{cases} \bar{v} \in \langle -k, k \rangle \\ |\bar{v}| \in > k \end{cases} \quad (30)$$

Wobec tego ekwiwalentne wartości wag będą ustalone z zależności:

$$\hat{p}_n = t(\bar{v}_n) p_n = \begin{cases} p_n \\ \exp\{-\lambda(|\bar{v}_n| - k)^g\} p_n \end{cases} \quad \text{dla} \quad \begin{cases} \bar{v}_n \in \langle -k, k \rangle \\ |\bar{v}_n| \in > k \end{cases} \quad (31)$$

Na ogół przyjmuje, że $l = 0,01 \div 0,1, g = 2$. Jednakże wartości parametrów l i g powinny być dobierane w sposób doświadczalny. Źle dobrane parametry powodują niepotrzebne zwiększenie liczby kroków procesu iteracyjnego rozwiązującego odporne zadanie wyrównawcze.

Zastosowanie funkcji tłumienia pozwala na sformułowanie następującej ekwiwalentnej macierzy wag

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{T}(\bar{\mathbf{V}}_p)\mathbf{P} = \begin{bmatrix} t(\bar{v}_1)p_1 & & & \\ & t(\bar{v}_2)p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t(\bar{v}_n)p_n \end{bmatrix} \quad (32)$$

gdzie:

$\mathbf{T}(\bar{\mathbf{V}}_p)$ jest diagonalną macierzą tłumienia o elementach $[\mathbf{T}(\bar{\mathbf{V}}_p)]_{ii} = t(\bar{v}_i)$.

Zadanie optymalizacyjne (24) można wówczas zastąpić zadaniem ekwiwalentnym o postaci:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_p = \mathbf{A}_p \hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}_p + \mathbf{L}_p \\ \mathbf{C}_D = m_0^2 \mathbf{Q}_D = m_0^2 \mathbf{P}^{-1} \\ \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{T}(\bar{\mathbf{V}}_p)\mathbf{P} \\ \varphi(\hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}_p) = \mathbf{V}_p^T \hat{\mathbf{P}} \mathbf{V}_p = \mathbf{V}_p^T \mathbf{T}(\bar{\mathbf{V}}_p) \mathbf{P} \mathbf{V}_p = \min \end{array} \right. \quad (33)$$

o rozwiązaniu iteracyjnym

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}_p^z = -(\mathbf{A}_p^T \mathbf{T}(\bar{\mathbf{V}}_p^{z-1}) \mathbf{P}^{z-1} \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{A}_p^T \mathbf{T}(\bar{\mathbf{V}}_p^{z-1}) \mathbf{P}^{z-1} \mathbf{L}_p \\ \mathbf{V}_p^z = \mathbf{Q}_V^{z-1} \mathbf{T}(\bar{\mathbf{V}}_p^{z-1}) \mathbf{P}^{z-1} \mathbf{L}_p \end{array} \right\}_{z=1,2,\dots} \quad (34)$$

Założyć należy, że proces iteracji nie powinien zawiera więcej niż 5 kroków $z = 1, 2, \dots, 5$.