

Temat: MACIERZ KOWARIANCJI, KOFAKTORÓW I WAG ORAZ ZASADY ICH PROPAGACJI

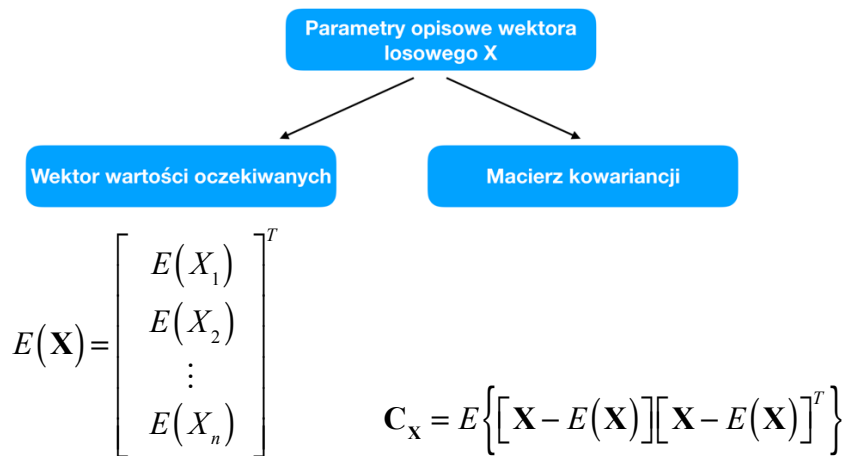
Zagadnienia:

2. Macierz kowariancji, kofaktorów i wag.
3. Zasady propagacji macierzy.

Zmienną losową wielowymiarową $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$ wygodnie jest prezentować w postaci wektora losowego:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n]^T$$

Szczególne role w praktycznych zastosowaniach wielowymiarowych zmiennych losowych odgrywają parametry opisowe:



Macierz kowariancji

Macierz kowariancji jest to macierz o postaci:

$$\mathbf{C}_X = E\{[\mathbf{X} - E(\mathbf{X})][\mathbf{X} - E(\mathbf{X})]^T\} = E\left\{ \begin{bmatrix} X_1 - E(X_1) \\ X_2 - E(X_2) \\ \vdots \\ X_n - E(X_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - E(X_1) & X_2 - E(X_2) & \dots & X_n - E(X_n) \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} E\{[X_1 - E(X_1)]^2\} & E\{[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]\} & \dots & E\{[X_1 - E(X_1)][X_n - E(X_n)]\} \\ E\{[X_2 - E(X_2)][X_1 - E(X_1)]\} & E\{[X_2 - E(X_2)]^2\} & \dots & E\{[X_2 - E(X_2)][X_n - E(X_n)]\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E\{[X_n - E(X_n)][X_1 - E(X_1)]\} & E\{[X_n - E(X_n)][X_2 - E(X_2)]\} & \dots & E\{[X_n - E(X_n)]^2\} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} V(X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & V(X_2) & \cdots & \text{cov}(X_2, X_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \text{cov}(X_n, X_2) & \cdots & V(X_n) \end{bmatrix}$$

bo $V(X_n) = \text{cov}(X_n, X_n)$, ponieważ $\text{cov}(X_i, X_j) = \text{cov}(X_j, X_i)$ dlatego \mathbf{C}_x jest macierzą symetryczną. Ze względu na strukturę (wariancje na przekątnej, kowariancje poza przekątną) macierz kowariancji jest macierzą symetryczną.

Jeżeli zmienne losowe $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$ są zmiennymi losowymi wzajemnie niezależnymi wówczas:

$$\forall_{i,j} : \text{cov}(X_i, X_j) = 0$$

dlatego macierz \mathbf{C}_x przyjmuje postać:

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} V(X_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V(X_2) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & V(X_n) \end{bmatrix} = \text{Diag}[V(X_1), V(X_2), \dots, V(X_n)]$$

Czasami macierz kowariancji zapisywana jest jako:

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix} \text{ ponieważ } \sigma_x = \sqrt{V(X)} \rightarrow \sigma_x^2 = V(X) \text{ - odchylenie standardowe}$$

Propagacja macierzy kowariancji

Jeżeli istnieje dany układ równań

$$\begin{cases} Y_1 = F_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ Y_2 = F_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ \vdots \\ Y_n = F_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{cases}$$

o znanej macierzy kowariancji \mathbf{C}_x wektora losowego $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$, a wektor

$\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n]^T$ jest także wektorem losowym, który jest jednoznacznym przekształceniem zmiennej losowej \mathbf{X} to można wyznaczyć macierz kowariancji wektora \mathbf{Y} , która przyjmuje postać:

$$C_Y = \begin{bmatrix} V(Y_1) & \text{cov}(Y_1, Y_2) & \cdots & \text{cov}(Y_1, Y_n) \\ \text{cov}(Y_2, Y_1) & V(Y_2) & \cdots & \text{cov}(Y_2, Y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{cov}(Y_n, Y_1) & \text{cov}(Y_n, Y_2) & \cdots & V(Y_n) \end{bmatrix}$$

i można ją wyznaczyć z wykorzystaniem C_X korzystając z zależności:

$$C_Y = D \cdot C_X \cdot D^T$$

gdzie:

$$D = \frac{\partial F(X)}{\partial(X)} = \partial_X F(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial X_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial X_1} & \frac{\partial F_m}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial X_n} \end{bmatrix}$$

Macierz kofaktorów

Elementy macierzy kowariancji nie są w praktyce znane. Parametry wchodzące w skład macierzy kowariancji zastępuje się ich przybliżeniami stanowiącymi elementy macierzy Q_X zwanej macierzą kofaktorów.

W większości przypadków zakłada się, że jest jednakowy poziom przybliżenia elementów C_X wówczas można, że:

$$C_X = \sigma_0^2 Q_X$$

gdzie: σ_0 - nieznaną współczynnik wariancji, który podlega oszacowaniu w procesie wyrównania.

Zgodnie z podanym modelem jednej macierzy C_X przyporządkowuje się zbiór równoległych macierzy kofaktorów Q .

$$\sigma_0 < 1 \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{cccc} 9 & -3 & 6 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 7 & 8 \\ 2 & -9 & 5 & -4 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 6 & -6 & 3 & -2 \\ -6 & 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & -6 & 2 & -1 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 3 & -3 & -3 & -5 \\ -3 & 0 & -6 & -4 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \\ -4 & -3 & -1 & -4 \end{array} \end{array} \right.$$

Macierze kofaktorów \mathbf{Q} różnią od macierzy kowariancji \mathbf{C}_X wartością współczynnika wariancji. Zakłada się, że jeżeli:

$\sigma_0 < 1$ - to macierz kowariancji jest niedoszacowana

$\sigma_0 = 1$ - to jest trafna ocena elementów macierzy kowariancji

$\sigma_0 > 1$ - to macierz kowariancji jest przeszacowana

Zasada propagacji macierzy kowariancji jest również analogiczna w przypadku macierzy kofaktorów i można zapisać, że:

$$\mathbf{C}_Y = \mathbf{D} \cdot \mathbf{C}_X \cdot \mathbf{D}^T \Leftrightarrow \sigma_0^2 \mathbf{Q}_Y = \mathbf{D} \cdot \sigma_0^2 \mathbf{Q}_X \cdot \mathbf{D}^T$$

a stąd wynika, że:

$$\mathbf{Q}_Y = \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_X \cdot \mathbf{D}^T$$

Macierz wag

Macierzą wag nazywamy taką macierz \mathbf{P} , że:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$$

Propagacja tej macierzy jest następująca:

$$\mathbf{Q}_Y^{-1} = (\mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_X \cdot \mathbf{D}^T)^{-1} = (\mathbf{D} \cdot \mathbf{P}_X \cdot \mathbf{D}^T)^{-1}$$

a z tego wynika, że:

$$\mathbf{P}_Y = (\mathbf{D} \cdot \mathbf{P}_X \cdot \mathbf{D}^T)^{-1}$$

Często wykorzystywanym przybliżeniem pozwalającym na łatwą budowę macierzy kowariancji jest:

$$V(X) = m_X^2 \Rightarrow \sigma_X^2 = m_X^2$$

wobec tego macierz kofaktorów przyjmuje postać:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} m_1^2 & & & \mathbf{0} \\ & m_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & m_n^2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1^2} & & & \mathbf{0} \\ & \frac{1}{m_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \frac{1}{m_n^2} \end{bmatrix}$$

Ćwiczenie

1. Wyznaczyć macierz kowariancji (C_Y) wektora $Y = [Y_1, Y_2]^T$ dla $X_1 = 0,50$, $X_2 = 0,25$ jeżeli:

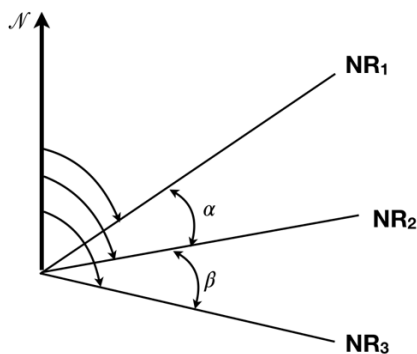
$$\begin{cases} Y_1 = X_1^2 - X_2 + 3 \\ Y_2 = 4X_1^3 + 2X_2^2 - X_3 + 1 \end{cases} \quad C_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial X_2} & \frac{\partial Y_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2X_1 & -1 & 0 \\ 12X_1^2 & 4X_2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_Y = D \cdot C_X \cdot D^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Namiary NR_1, NR_2, NR_3 są niezależnymi losowymi o odchyleniach standardowych $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 3, \sigma_3 = 1$. Wyznaczyć macierz kowariancji kątów α, β .



Rozwiązanie:

Z danych wynika, że:

$$C_{NR} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

z rysunku wynika, że:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial NR_1} & \frac{\partial \alpha}{\partial NR_2} & \frac{\partial \alpha}{\partial NR_3} \\ \frac{\partial \beta}{\partial NR_1} & \frac{\partial \beta}{\partial NR_2} & \frac{\partial \beta}{\partial NR_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{\alpha, \beta} = D \cdot C_{NR} \cdot D^T = \begin{bmatrix} 13 & -9 \\ -9 & 10 \end{bmatrix}$$

kąty α, β są zależne, ponieważ $cov(\alpha, \beta) = -9$ i to wynika z rysunku.

3. Wyznaczyć macierz kowariancji Y_1, Y_2 jeżeli:

$$\begin{cases} Y_1 = 2X_1 - X_2 \\ Y_2 = X_1 + X_2 \end{cases} \quad \sigma_{X_1} = 2, \quad \sigma_{X_2} = 2, \quad cov(X_1, X_2) = 0,5$$

Rozwiązanie:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C_X = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & cov(X_1, X_2) \\ cov(X_1, X_2) & \sigma_{X_2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0,5 \\ 0,5 & 4 \end{bmatrix}$$

wobec tego:

$$C_Y = D \cdot C_X \cdot D^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0,5 \\ 0,5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 4,5 \\ 4,5 & 9 \end{bmatrix}$$

4. Macierz kofaktorów zmiennych X_1, X_2, X_3

$$Q_X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Obliczyć macierz kowariancji zmiennych Y_1, Y_2 dla zmiennych $X_1=0,5, X_2=0,3, X_3=0,2$ jeżeli:

$$\begin{cases} Y_1 = X_1^2 - X_2 + X_3 - 23 \\ Y_2 = X_3 + 14 \end{cases} \quad \text{oraz } \sigma_0^2 = 2$$

Rozwiązanie

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial X_2} & \frac{\partial Y_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2X_1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_Y = \sigma_0^2 Q_Y = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$