

Temat: CEL WYRÓWNANIA OBSERWACJI NAWIGACYJNYCH

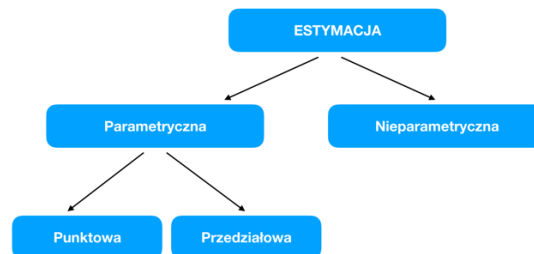
Zagadnienia:

1. Cel wyrównania obserwacji nawigacyjnych i hydrograficznych.
2. Zasady formułowania zadań wyrównawczych i ich rozwiązywanie z zastosowaniem metody najmniejszych kwadratów.
3. Rozwiązanie zadania wyrównawczego

Wyniki pomiarów nawigacyjnych, podobnie jak wyniki innego rodzaju pomiarów (np. geodezyjnych) są obarczone błędami pomiaru. Na ogół przyjmuje się, że błąd pomiaru jest zmienną losową o pewnych parametrach opisowych (wartości oczekiwanej, wariancji itd.). Obok tych błędów mogą także występować błędy systematyczne czy też błędy pomiaru o charakterze deterministycznym (zależne od pewnych zmiennych, np. parametrów ośrodka pomiarowego). Złożenie wyróżnionych błędów stanowi całkowity błąd pomiaru. W każdym wariancie takiego złożenia występuje jednak błąd losowy co oznacza, że zarówno całkowity błąd pomiaru jak i obciążony przez niego wynik pomiaru są zmiennymi losowymi. W takiej sytuacji podstawowym zagadnieniem jest optymalna względem jakiegoś kryterium oraz dobrze uzasadniona teoretycznie ocena (estymacja) wybranych parametrów stanu obiektu mierzonego.

W problemach nawigacyjnych głównymi (choć nie jedynymi) parametrami stanu wyznaczanymi na podstawie losowych wyników pomiaru są współrzędne pozycji jednostki pływającej. Ponieważ współczesne systemy nawigacyjne oraz dostępne środki obliczeniowe pozwalają na tworzenie i opracowanie nawet dużych, nad określonych układów obserwacyjnych, proces ustalania optymalnych wartości współrzędnych pozycji może się odbywać z zastosowaniem formuł matematycznych wynikających z zasad współczesnej teorii estymacji.

Estymacja to szacowanie wartości parametrów opisowych zmiennej losowej na podstawie zbioru realizacji tej zmiennej.



parametryczna – szacowanie parametrów opisowych zmiennej losowej

nieparametryczna – szacowanie postaci funkcji p-stwa, funkcji gęstości, dystrybuanty

parametryczna punktowa – oceną parametru jest jedna konkretna wartość

parametryczna przedziałowa – wyznaczony jest pewien liczbowy przedział, w którym z określonym p-stwem zawiera się szacowny parametr

Przedmiotem naszego zainteresowania jest estymator punktowy $\hat{E}(x^{obs})$ wartości oczekiwanej $E(x^{obs})$, gdzie x^{obs} - to zmienna losowa stanowiąca wynik pomiaru wielkości x . Ponieważ zakłada się, że:

$$x^{obs} = x + \varepsilon \quad \text{oraz} \quad E(\varepsilon) = 0 \rightarrow E(x^{obs}) = x$$

na tej podstawie:

$$\hat{E}(x^{obs}) = \hat{x}$$

Estymator jest zmienną losową. Należy pogodzić się z tym, że między $\hat{E}(x^{obs}) = \hat{x}$, a wartością prawdziwą $\hat{E}(x^{obs}) = x$ istnieje losowa różnica η tzn.:

$$\hat{E}(x^{obs}) = E(x^{obs}) + \eta \Leftrightarrow \hat{x} = x + \eta$$

W problemach nawigacyjnych (tak jak i w geodezyjnych) model przedstawiony wcześniej

$$x_i^{obs} = x + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

przekształcamy do postaci:

$$x_i^{obs} = x + \varepsilon_i \Rightarrow x_i^{obs} - \varepsilon_i = x \Rightarrow x_i^{obs} + v_i = x$$

Przekształcenie jest formalne i nie ma żadnego specjalnego znaczenia teoretycznego, jednakże powszechnie przyjęta w zadaniach wyrównawczych wielkość $v_i = -\varepsilon_i$ zwana jest poprawką.

Poprawka to taka wartość o jaką należy poprawić „wynik” pomiaru, aby uzyskać prawdziwą wartość wielkości mierzonej.

Wielkość

$$v_i = x - x_i^{obs}$$

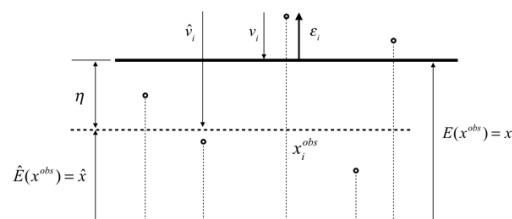
nazywać będziemy elementarnym modelem funkcjonalnym.

Zakładając, że \hat{x} jest estymatorem wartości prawdziwej x to estymatorem poprawki v_i jest wyrażenie

$$\hat{v}_i = \hat{x} - x_i^{obs}$$

Pamiętać należy, że z powodu różnicy losowej η estymatory poprawek nie są równe i należy o tym pamiętać w praktyce pomiarowej.

Nie można głęboko wnioskować o rzeczywistych błędach pomiaru na podstawie wielkości poprawek. Duża poprawka nie oznacza dużego błędu.



Problemy związane z wyznaczaniem poprawek oraz ustalenia wartości i estymowanej wartości prawdziwej jest podstawowym zadaniem rachunku wyrównawczego.

Elementarny model funkcjonalny jest wygodnie zapisać w postaci macierzowej:

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = x - x_1^{obs} \\ v_2 = x - x_2^{obs} \\ \vdots \\ v_n = x - x_n^{obs} \end{array} \right\} \Leftrightarrow V = \mathbf{1}_n x - \mathbf{x}^{obs}$$

gdzie: V – wektor poprawek, \mathbf{x}^{obs} – losowy wektor wyników pomiaru

W podobny sposób można także formułować i rozwiązywać problemy dotyczące kompleksowej analizy dokładności uzyskiwanych wyznaczeń. Zakładając, że wyniki pomiaru są zmiennymi niezależnymi można utworzyć macierz o postaci:

$$C_{\mathbf{x}^{obs}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Wariancje σ_n^2 nie są znane, wobec tego można zamienić ją kofaktorami q_i takimi, że:

$$\sigma_i^2 = \sigma_0^2 q_i \Rightarrow C_{\mathbf{x}^{obs}} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} q_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_n^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{x}^{obs}}$$

gdzie: σ_0^2 - nieznaną współczynnik wariancji, $\mathbf{Q}_{\mathbf{x}^{obs}}$ - macierz kofaktorów

Jednakże najbardziej przydatne w praktyce pomiarowej jest przyjmowanie za kofatory błędy średnie instrumentów, które uzyskujemy z metryczki urządzenia. Wówczas przyjmuje się odwrotność macierzy kofaktorów:

$$\mathbf{P} = c \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{x}^{obs}}^{-1} \quad \text{gdzie } c > 0, \text{ która nazwana jest macierzą wag.}$$

Macierz wag ma postać:

$$\mathbf{P} = c \cdot \mathbf{Q}_{x^{obs}}^{-1} = c \cdot \begin{bmatrix} m_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_n^2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{c}{m_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{m_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c}{m_n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_n \end{bmatrix}$$

gdzie: $p_i = \frac{c}{m_i^2}$ - waga obserwacji

Podsumowując można zapisać, że:

$$\mathbf{C}_{x^{obs}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{x^{obs}} = \frac{1}{c} \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}$$

Macierz kowariancji, kofaktorów i wag będzie przedmiotem następnego wykładu.

Proces estymacji jest realizowany z zastosowaniem wynikającego z przyjętej metody kryterium optymalizacyjnego.

Poszukiwanie estymatora $\hat{E}(x^{obs}) = \hat{x}$ jest zadaniem polegającym na wpasowaniu tej wielkości w zbiór wyników pomiaru $x_i^{obs}, i = 1, \dots, n$ w taki sposób, aby powstające reszty (estymatory poprawek) $\hat{v}_i, i = 1, \dots, n$ spełniające kryterium optymalizacyjne. Kryterium optymalizacyjne określa funkcję celu optymalizacji o której będziemy mówić na następnych wykładach.