

Temat: Zadanie wyrównawcze w metodzie parametrycznej oraz jego rozwiązanie i metody kontroli

1. Rozwiązanie zadania wyrównawczego
2. Metody kontroli wyrównania wyników pomiarów
3. Macierz kowariancji estymatora $\hat{\mathbf{X}}$

Rozwiązanie zadania wyrównawczego

Stosując wcześniej podany model funkcjonalny:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{d}\mathbf{x} + \mathbf{L}$$

oraz przyjmując model macierzy kowariancji wyników pomiaru \mathbf{x}^{obs} :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}^{obs}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{x}^{obs}} = \frac{1}{c} \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}$$

dla jasności dalszych wyznaczeń przyjmujemy, że $c = 1$

można sformułować następujące zadanie optymalizacyjne:

$$(*) \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{d}\mathbf{x} + \mathbf{L} & \text{model funkcjonalny} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{x}^{obs}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{x}^{obs}} = \frac{1}{c} \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1} & \text{model statystyczny} \\ \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} \Rightarrow \min & \text{kryterium wyrównania} \end{array} \right.$$

nazywane zadaniem wyrównawczym.

Poszukujemy minimum funkcji celu (kryterium wyrównania). Można stwierdzić, że funkcja osiągnie minimum w takim punkcie $\mathbf{d}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}$ dla którego spełniony jest układ równań normalnych:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{d}}\mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} = 0$$

Należy zauważyć, że:

$$\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{n,r}, \text{ to } \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{r,r} \text{ oraz } \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \in \mathfrak{R}^{r,1}$$

Z tego wynika, że układ równań (*) zawiera tyle niewiadomych ile zawiera on równań. Z tego wynika, że $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ jest macierzą osobliwą tzn.: $R(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) = r$ czyli do rozwiązania układów równań (*) można zastosować metody stosowane do rozwiązywania układów równań, które omówione były w semestrze V:

- metodą nieoznaczoną: $\hat{\mathbf{d}}\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}$

- metoda oznaczona: $[\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} : \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}] = \mathbf{R}^T [\mathbf{R} : \mathbf{L}_R]$ stąd wykorzystując zależność

$$\mathbf{R} \hat{\mathbf{d}}\mathbf{x} + \mathbf{L}_R = 0 \text{ wyznaczyć należy } \hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}$$

Wyznaczenie estymatorów przyrostów do przybliżonych wartości parametrów $\hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}$ a na jego podstawie parametrów:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^0 + \hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}$$

Nie kończy procesu wyrównania.

Należy korzystając z wektora $\hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}$ obliczyć estymator wektora poprawek

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{d}}\mathbf{x} + \mathbf{L}$$

A następnie wyrównane wyniki pomiaru (estymatory prawdziwych wartości wielkości mierzonych):

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{obs} + \hat{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{obs} \\ \mathbf{x}_2^{obs} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{obs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_1 \\ \hat{\mathbf{v}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{v}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix}$$

Metody kontroli wyrównania wyników pomiarów

Po wyznaczeniu estymatora $\hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}$, a następnie wektora poprawek $\hat{\mathbf{V}}$ należy wykonać obliczenia kontrolne złożone z 2 etapów.

Etap I polega na sprawdzeniu czy jest spełniona równość:

$$s = s'$$

gdzie:

$$s = \hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{P} \mathbf{V}$$

$$s' = \mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{d}}\mathbf{x} + \mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{L}$$

Niespełnienie równości $s = s'$ świadczy o błędach numerycznych w wyznaczaniu $\hat{\mathbf{d}}\mathbf{x}$ i $\hat{\mathbf{V}}$.

Jednak pozytywny wynik nie mówi o tym, że uzyskano prawidłowe wyniki wyrównania, dlatego trzeba przeprowadzić II etap kontroli.

Etap II polega na sprawdzeniu czy estymatory zachowują się tak jak wartości prawdziwe:

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{x} = F(\mathbf{X}) \Leftrightarrow \hat{\mathbf{x}} = F(\hat{\mathbf{X}})$$

Negatywny wynik stanowi, że źle sformułowany układ równań obserwacyjnych lub pierwsze rozwinięcia w szereg Taylora w niedostatecznym stopniu zastępuje nieliniową funkcję $F(\mathbf{X})$ w punkcie $\mathbf{X} = \mathbf{X}^0$.

W skrócie przybliżone wartości \mathbf{X}^0 są zbyt odległe od wartości $\hat{\mathbf{X}}$, które minimalizuje funkcja celu: $\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} \Rightarrow \min$.

Wówczas należy powtórzyć obliczenia dla $\hat{\mathbf{X}}$ jako przybliżonego \mathbf{X}^0 tak długo aż uzyskamy pozytywny rezultat kontroli etapu II.

Macierz kowariancji estymatora $\hat{\mathbf{X}}$

Z punktu widzenia statystyki matematycznej dotychczasowe działania są estymacją wartości oczekiwanej $E(x^{obs}) = \mathbf{x} = F(\mathbf{X})$ na podstawie pośredniej oceny $\hat{\mathbf{X}}$.

Z praktycznego punktu widzenia ważna jest jednak także informacja o jakości prowadzonych wyznaczeń.

W praktyce w zakres oceny dokładności wchodzi wyznaczenie macierzy kowariancji ($\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}}$):

- estymatora macierzy kowariancji wektora $\hat{\mathbf{X}}$ - a na jej podstawie błędów średnich wyrównanych parametrów, błędów średnich położenia punktu (lub elementów elipsy ufności);

- błędy średnie wyrównanych obserwacji oraz błędów średnich dowolnych funkcji estymatora $\hat{\mathbf{X}}$

Podstawą wszystkich wyznaczeń jest model macierzy kowariancji wyników pomiaru o znanej postaci:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{X}^{obs}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{X}^{obs}} = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}$$

W modelu macierzy kowariancji występuje nieznaną współczynnik wariancji σ_0 . Nieznany, nieobciążony i w niektórych przypadkach najefektywniejszy (dla normalnego rozkładu błędów losowych) estymator współczynnika wariancji ma postać:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n-r} \hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{V}} = m_0^2$$

Od tego momentu estymator współczynnika wariancji będziemy oznaczać jako m_0^2 i uzyskujemy estymator macierzy kowariancji wektora $\hat{\mathbf{X}}$ (w niniejszym opracowaniu pomijam dowód):

$$\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{X}^{obs}} = m_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$$

Powyższą macierz nazywać będziemy macierzą kowariancji wyrównanych parametrów o strukturze:

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} m_{\hat{\mathbf{X}}_1}^2 & \text{cov}(\hat{\mathbf{X}}_1, \hat{\mathbf{X}}_2) & \cdots & \text{cov}(\hat{\mathbf{X}}_1, \hat{\mathbf{X}}_r) \\ \text{cov}(\hat{\mathbf{X}}_2, \hat{\mathbf{X}}_1) & m_{\hat{\mathbf{X}}_2}^2 & \cdots & \text{cov}(\hat{\mathbf{X}}_2, \hat{\mathbf{X}}_r) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{cov}(\hat{\mathbf{X}}_r, \hat{\mathbf{X}}_1) & \text{cov}(\hat{\mathbf{X}}_r, \hat{\mathbf{X}}_2) & \cdots & m_{\hat{\mathbf{X}}_r}^2 \end{bmatrix}$$

Jak każda macierz kowariancji (o czym była mowa wcześniej) jest macierzą symetryczną, a na przekątnej są zawarte kwadraty błędów średnich poszczególnych wyrównanych parametrów zatem błąd średni i-tego wyrównanego parametru można przedstawić w postaci:

$$m_{\hat{\mathbf{X}}_i} = \sqrt{[\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{X}}}]_{ii}}$$

gdzie: $[o]_{ii}$ - i-ty element przekątnej macierzy